Groten... mi?
Egy konstans esete a kvantuminformatikában

Németh András

ELTE IK

2020. április 6.

Alexander Grothendieck

Figure: 1928-2014

A Grothendieck-tétel

Legyen a következő valós vagy komplex szám értelmezve az n dimenziós (valós vagy komplex) Banach-téren ható M_{ij} tetszőleges operátorhoz:

$$I = \sum_{i,j=1}^{n} M_{ij} a_i b_j \tag{1}$$

ahol a_i, b_j abszolút egységértékűek.
Valamint egy d dimenziós Hilbert-téren:

$$I^d = \sum_{i,j=1}^{n} M_{ij} \langle a_i | b_j \rangle \tag{2}$$

ahol a_i és b_j a Hilbert-tér egységvektorai $\langle \cdot | \cdot \rangle$ értelmezett belső szorzattal.
A Grothendieck-egyenlőtlenség ezekkel:

$$I^d \leq K(n,d) \max_{a_i, b_j = \pm 1} I \tag{3}$$

ahol a $K(n,d)$ egy skalár (valós vagy komplex).

Klasszikus és kvantum korrelációk

A és B egymástól távol és függetlenül méréseket végeznek egy közös és két részből álló rendszeren, keresve a mért adatok közötti lineáris kapcsolatot. M kérdéshalmazból, N lehetséges válasz. Legyen x és y, illetve a és b A és B feltett kérdés, illetve az ezekre adott válasz. A lokális korreláció:

$$p^C(a,b|x,y) = \sum_\lambda q(\lambda) r(a|x,\lambda) s(b|y,\lambda). \tag{4}$$

ahol $r(a|x,\lambda)$, illetve $s(b|y,\lambda)$ A és B mérési eloszlása az a és b mért tulajdonságoknak, $p(\lambda)$ a λ forrás valószínűségi eloszlása.
Ugyanez kvantumosan a Born-szabály szerint (M_a, M_b a két mérés A és B által):

$$p^Q(a,b|x,y) = Tr(\rho^{AB} M_a M_b) \tag{5}$$

Kérdés: Felírható-e a kvantumos korreláció a klasszikus formában is?

Werner állapotok

Werner állapot általánosságban az a $d \times d$ dimenziós két részből álló Hilbert-téren ható sűrűségmátrix, ami tetszőleges unitér transzformációra invariáns:

$$\rho^W = (U \otimes U)\, \rho^W (U^\dagger \otimes U^\dagger) \tag{6}$$

A kvantuminformatika számára legizgalmasabb a két qubites állapot, amely felírható a következő formában is:

$$\rho^W = v|\psi^{Bell}><\psi^{Bell}| + \frac{1-v}{4}\mathbb{I} \tag{7}$$

Itt v-t a láthatóság, ahogy a második additív tag a Bell állapothoz adódó fehér zaj a környezetből.

Szeparábilitás, összefonódottság, lokalitás

Szeparábilitás:

$$\rho^{AB} = \sum p_i \, \rho_i^A \otimes \rho_i^B, \; 0 \leq p_i \leq 1$$

A két qubites esetre Werner 89-ben bizonyította, hogy $v \leq 1/3$ esetén ρ^W szeparábilis. Ha v értéke ettől nagyobb (összefonódott állapot), még mindig lehetséges lokális modellt készíteni (klasszikus korreláció). A Bell állapotokra viszont nem lehet LHV modellt készíteni.

Azaz valahol van egy kritikus érték, ami felett nem megoldható az LHV modell, alatta viszont klasszikus korreláció értelmezhető.

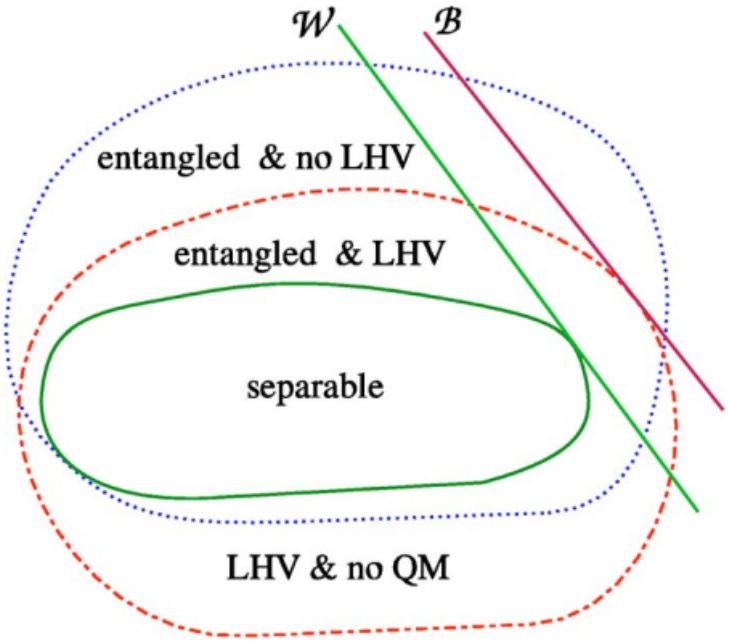

Figure: Lopva HGBL cikkből.
LHV: local hidden variable model
W a (random) Werner állapot,
B a Bell állapot ($v = 1$)

Bell egyenlőtlenségek és a Grothendieck konstans

Az általános Bell egyenlőtlenség, ha m obszervábilis van A és B oldalán, $A_1, \ldots, A_m$ és $B_1, \ldots, B_m$ mérésekkel meghatározva:

$$|\sum_{i,j=1}^{m} M_{ij}\, p_{ij}^{Q}| \leq 1 \tag{8}$$

Itt M_{ij} tetszőleges valós $m \times m$ normált mátrix határozza meg az egyenlőtlenséget. Az M mátrix úgy normált, hogy a lokális korlátja a determinisztikus lokális modellnek feleljen meg:

$$\max_{a_i, b_j = \pm 1} |\sum_{i,j=1}^{m} M_{ij}\, a_i b_j| \leq 1 \tag{9}$$

(Tsirelson C^* algebrákkal vezeti le).

Bell egyenlőtlenségek és a Grothendieck konstans II.

Egy tiszta szinglett állapot esetén könnyen számolható, figyelembe véve a projektív mérés operátorát $A_i = \vec{a_i}\vec{\sigma}$ és $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$, B_j-re hasonlóan, hogy a korreláció $p^Q =< \psi^{Bell}|A_i \otimes B_j|\psi^{Bell} >$ értéke $p^Q_{ij} = -\vec{a_i}\vec{b_j}$.
A Bell egyenlőtlenség [8] maximális megsértése a szinglett állapotra:

$$K = \sup_{M_{ij}} \max_{\vec{a_i},\vec{b_j}} |\sum_{i,j=1}^{m} M_{ij}\, \vec{a_i}\vec{b_j}| \tag{10}$$

A maximálisan kevert állapotban a korreláció eltűnik, ezzel pedig a v_C kritikus láthatóság értéke:

$$v_c^W = \frac{1}{K} \qquad (*) \tag{11}$$

Ez a határérték alatt a két qubites Werner állapot, habár összefonódott állapotban van, nem sérti a Bell egyenlőtlenséget, azaz egy lokális "klasszikus", determinisztikus modellel leírható.

* Bell egyenlőtlenségek és a Grothendieck konstans

Kézlengetősen az alábbival lehet belátni. Ha lokális determinisztikus korrelációval megegyezik a kvantumos korrelációnk és ezzel írjuk fel a Bell egyenlőtlenséget, az így alakul:

$$\sum_{i,j=1}^{m} M_{ij} a_i b_j = \sum_{i,j=1}^{m} M_{ij} Tr(\rho^W A_i \otimes B_j) \tag{12}$$

Ide beírjuk a ρ^W Werner állapot [7] definícióját, valamint $A_i = \vec{a_i}\vec{\sigma}$ és $B_i = \vec{b_i}\vec{\sigma}$, továbbá felhasználva, hogy a Pauli mátrixok nyoma nulla:

$$Tr(\rho^W A_i \otimes B_j) = v^W \, p_{ij}^{Bell} = -v^W \, \vec{a_i}\vec{b_j} \tag{13}$$

A [12] így, majd beírjuk [3]-t:

$$\sum_{i,j=1}^{m} M_{ij} a_i b_j = v_c^W | \sum_{i,j=1}^{m} M_{ij} \vec{a_i}\vec{b_j} | \leq v_c^W \, K \sum_{i,j=1}^{m} M_{ij} a_i b_j \tag{14}$$

Lazán osztva a szummával és véve az extremumát kapjuk az $1 = v_c^W \, K$ összefüggést.

Referenciák

J. J. Sakurai, J. Napolitano
Modern Quantum Mechanics, Addison Wesley (2011)

D. Greenberger, K. Hentschel, F. Weinert
Compendium of Quantum Physics, Springer (2009)

Eleanor G. Rieffel, Wolfgang H. Polak
Quantum Computing: A Gentle Introduction, MIT Press (2014)

Michael A. Nielsen, Isaac L. Chuang
Quantum Computation and Quantum Information, Cambridge (2011)

A. Acín, N. Gisin, G. Toner
Grothendieck's constant and local models for noisy entangled quantum states, https://arxiv.org/abs/quant-ph/0606138

P. Diviánszky, E. Bene, T. Vértesi
Qutrit witness from the Grothendieck constant of order four, https://arxiv.org/abs/1707.04719

Referenciák

J. S. Bell

On the Einstein Podolsky Rosen paradox, Physics Vol. 1, No.3 195—200, (1964)

J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, R. A. Holt

Proposed experiment to test local hidden-variable theories, Phys. Rev. Lett., 23 (15): 880–4

T. Vértesi

More efficient Bell inequalities for Werner states, Phys. Rev. A 78, 032112 (2008)

D. Patel, A. Roy, I. Chakrabarty, N. Ganguly

Broadcasting of nonlocality in two qubit systems, https://arxiv.org/abs/1909.12565

H. Chau Nguyen, Otfried Gühne

Quantum steering of Bell-diagonal states with generalized measurements, https://arxiv.org/abs/1909.03963

Reinhard F. Werner, Michael M. Wolf

Bell inequalities and Entanglement, https://arxiv.org/abs/quant-ph/0107093

Referenciák

P. Hyllus, O. Gühne, D. Bruß, M. Lewenstein

Relations between entanglement witnesses and Bell inequalities, https://www.icfo.eu/images/publications/J05-035.pdf

Ma-Cheng Yang, Jun-Li Li, Cong-Feng Qiao

The Decomposition of Werner and Isotropic States, https://arxiv.org/abs/2003.00694

N. Gisin

Stronger Bell Inequalities for Werner states?, Gisin webpage